अध्याय **5**

सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघातीय समीकरण

Complex Numbers and Quadratic Equations

प्रश्नावली 5.1

निर्देश (प्र. सं. 1 - 10) सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक को $a + ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

(प्र.सं.1 - 3) निम्नलिखित प्रश्नों में $i^2 = -1, i^3 = i^2 \cdot i = -i, i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ का प्रयोग करेंगे।

यदि 2 या 4 से अलग i की घात अधिक हैं, तब हम i की घात को 2 या 4 के गुणक के रूप में परिवर्तन करने का प्रयास करेंगे।

प्रश्न 1. $(5i)\left(-\frac{3}{5}i\right)$

हल $5\left(-\frac{3}{5}\right)i^2 = (-3)(-1) = 3 = 3 + 0i$ $(\because i^2 = -1)$

प्रश्न 2. $i^9 + i^{19}$

हल $i^9 + i^{19} = i^9 (1 + i^{10}) = i^9 [1 + (i^2)^5]$ (i^9 उभयनिष्ठ लेने पर)

$$= i^9 [1 + (-1)^5] = i^9 [1 - 1] = 0 = 0 + 0i$$

प्रश्न 3. i^{-39}

हल $i^{-39} = \frac{1}{i^{39}}$

अंश तथा हर में i से गुणा करने पर,

$$= \frac{i}{i^{40}} = \frac{i}{(i^4)^{10}}$$ (हर में i की घात 4 का गुणक है)

$$= \frac{i}{(1)^{10}} = \frac{i}{1} = i = 0 + i$$ $(\because i^4 = 1)$

प्रश्न 4. $3(7 + i7) + i(7 + i7)$

(प्र.सं. 4 - 7) प्रत्येक प्रश्न में सर्वप्रथम सम्मिश्र संख्या में से वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को पृथक करेंगे, तत्पश्चात् इसे सरल करेंगे।

हल दिया है, $3(7+i7)+i(7+i7) = 21+21i+7i+i^2 7 = 21+28i-7 \qquad (\because i^2=-1)$
$$= 14+28i$$

> **नोट** *विद्यार्थी हमेशा याद रखें कि सापेक्षिक, वास्तविक तथा काल्पनिक भाग ही जुड़ते या घटते हैं।*

प्रश्न 5. $(1-i)-(-1+6i)$

हल $1-i+1-6i = (1+1)-(i+6i) = 2-7i$

प्रश्न 6. $\left(\frac{1}{5}+i\frac{2}{5}\right)-\left(4+i\frac{5}{2}\right)$

हल $\frac{1}{5}+i\frac{2}{5}-4-i\frac{5}{2} = \left(\frac{1}{5}-\frac{4}{1}\right)+i\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{1-20}{5}\right)+i\left(\frac{4-25}{10}\right) = -\frac{19}{5}-\frac{21i}{10}$

प्रश्न 7. $\left[\left(\frac{1}{3}+i\frac{7}{3}\right)+\left(4+i\frac{1}{3}\right)\right]-\left(-\frac{4}{3}+i\right)$

हल $\left(\frac{1}{3}+i\frac{7}{3}+4+i\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{3}-i$

$$= \left(\frac{1}{3}+4+\frac{4}{3}\right)+i\left(\frac{7}{3}+\frac{1}{3}-1\right) = \left(\frac{1}{3}+\frac{4}{1}+\frac{4}{3}\right)+i\left(\frac{7}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{1}\right)$$

$$= \frac{(1+12+4)}{3}+i\left(\frac{7+1-3}{3}\right) = \frac{17}{3}+i\frac{5}{3}$$

प्रश्न 8. $(1-i)^4$

हल $(1-i)^4 = [(1-i)^2]^2 = (1+i^2-2i)^2$ [$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$ का प्रयोग करने पर]

$$= (1-1-2i)^2 \qquad (\because i^2=-1)$$

$$= (-2i)^2 = (-2)^2 i^2 = 4(-1) = -4+0i$$

प्रश्न 9. $\left(\frac{1}{3}+3i\right)^3$

यहाँ पर हम, सूत्र $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$ का प्रयोग करेंगे, तत्पश्चात् इसे सरल करेंगे।

हल $\left(\frac{1}{3}+3i\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3+(3i)^3+3\times\frac{1}{3}\times 3i\left(\frac{1}{3}+3i\right)$

$$= \frac{1}{27}+27i^3+3i\left(\frac{1}{3}+3i\right)$$

$$= \frac{1}{27}-27i+3i\times\frac{1}{3}+3i\times 3i \qquad (\because i^3=-i)$$

$$= \frac{1}{27}-27i+i+9i^2$$

$$= \frac{1}{27}-27i+i-9 \qquad (\because i^2=-1)$$

$$= \left(\frac{1}{27} - \frac{9}{1}\right) - i\,(27 - 1) = \left(\frac{1 - 243}{27}\right) - 26i$$
$$= \frac{-242}{27} - 26i$$

प्रश्न 10. $\left(-2 - \frac{1}{3}i\right)^3$

सर्वप्रथम ऋणात्मक चिन्ह को उभयनिष्ठ लेंगे तत्पश्चात् सूत्र
$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ का प्रयोग करके हल करेंगे।

हल
$$(-1)^3\left(2 + \frac{1}{3}i\right)^3 = -\left[(2)^3 + \left(\frac{1}{3}i\right)^3 + 3 \times 2 \times \frac{1}{3}i\left(2 + \frac{1}{3}i\right)\right]$$
$$= -\left[8 + \frac{1}{27}i^3 + 2i\left(2 + \frac{1}{3}i\right)\right]$$
$$= -\left[8 - \frac{1}{27}i + 4i + \frac{2}{3}i^2\right] \qquad (\because i^3 = -i)$$
$$= -\left[8 - \frac{1}{27}i + 4i - \frac{2}{3}\right] \qquad (\because i^2 = -1)$$
$$= -\left[\left(\frac{8}{1} - \frac{2}{3}\right) + i\left(\frac{4}{1} - \frac{1}{27}\right)\right]$$
$$= -\left[\left(\frac{24 - 2}{3}\right) + i\left(\frac{108 - 1}{27}\right)\right] = -\left[\frac{22}{3} + i\frac{107}{27}\right]$$

निर्देश (प्र. सं. 11 - 13) सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

(प्र.सं. 11 - 13) यदि सम्मिश्र संख्या z है, तब उसका गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{z}$ होगा। अब $\frac{1}{z}$ में z के संयुग्मी $(\bar{z})$ से अंश तथा हर में गुणा करेंगे, इसे हम तब तक हल करेंगे जब तक $\frac{1}{z}$, $(a + ib)$ के रूप में परिवर्तित नहीं होता है।

प्रश्न 11. $4 - 3i$

हल माना $z = 4 - 3i$

तब इसका गुणात्मक प्रतिलोम है
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{4 - 3i}$$
$$= \frac{1}{4 - 3i} \times \frac{4 + 3i}{4 + 3i} = \frac{4 + 3i}{16 - 9i^2}$$
$[(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ का प्रयोग करने पर$]$
$$= \frac{4 + 3i}{16 + 9} \qquad (\because i^2 = -1)$$
$$= \frac{4 + 3i}{25} = \frac{4}{25} + \frac{3i}{25}$$

प्रश्न 12. $\sqrt{5} + 3i$

हल माना $z = \sqrt{5} + 3i$

तब इसका गुणात्मक प्रतिलोम है

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{5}+3i} = \frac{1}{\sqrt{5}+3i} \times \frac{\sqrt{5}-3i}{\sqrt{5}-3i}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-3i}{5-9i^2} \qquad [(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \text{ का प्रयोग करने पर}]$$

$$= \frac{\sqrt{5}-3i}{5+9} = \frac{\sqrt{5}-3i}{14} = \frac{\sqrt{5}}{14} - \frac{3i}{14} \qquad (\because i^2 = -1)$$

प्रश्न 13. $-i$

हल माना $z = -i$

तब इसका गुणात्मक प्रतिलोम है

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{i} = -\frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{-i}{i^2} = \frac{-i}{-1} = i \qquad (\because i^2 = -1)$$

$$= 0 + i$$

प्रश्न 14. निम्नलिखित व्यंजक को $a + ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए

$$\frac{(3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5})}{(\sqrt{3} + i\sqrt{2}) - (\sqrt{3} - i\sqrt{2})}$$

हल माना $z = \dfrac{(3+i\sqrt{5})(3-i\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+i\sqrt{2})-(\sqrt{3}-i\sqrt{2})} = \dfrac{(3)^2 - (i\sqrt{5})^2}{\sqrt{3}+i\sqrt{2}-\sqrt{3}+i\sqrt{2}}$

$$[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$$

$$= \frac{9 - i^2 5}{2\sqrt{2}\,i} = \frac{9+5}{2\sqrt{2}\,i} \qquad (\because i^2 = -1)$$

$$= \frac{14}{2\sqrt{2}i} = \frac{7}{\sqrt{2}\,i} \times \frac{i}{i} = \frac{7i}{\sqrt{2}\,i^2} = -\frac{7i}{\sqrt{2}} = 0 - i\left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)$$

प्रश्नावली 5.2

निर्देश (प्र. सं. 1 - 2) **सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक का मापांक और कोणांक ज्ञात कीजिए।**

यदि सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ के रूप की है, तब z का मापांक

$$|z| = +\sqrt{a^2 + b^2} = +\sqrt{(\text{वास्तविक भाग})^2 + (\text{काल्पनिक भाग})^2}$$

तथा z का कोणांक, $\tan\theta = \left|\dfrac{b}{a}\right|$ के द्वारा प्राप्त होता है। (अर्थात् काल्पनिक भाग को वास्तविक भाग से विभाजित करते हैं) हम θ का मान इस प्रकार से लेंगे कि वह अंतराल $-\pi < \theta \le \pi$ में ही हों। (केवल मुख्य मान)

प्रश्न 1. $z=-1-i\sqrt{3}$

हल $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

तथा $$\tan\theta=\left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right|=\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

परन्तु बिंदु आर्गंड तल के तृतीय चतुर्थांश में स्थित है, क्योंकि z का वास्तविक तथा काल्पनिक दोनों भाग ऋणात्मक हैं।

$\therefore$ $$\arg(z)=-\pi+\theta=-\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{-2\pi}{3}$$

प्रश्न 2. $z=-\sqrt{3}+i$

हल $|z|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

$$\tan\theta=\left|\frac{1}{-\sqrt{3}}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$$

चूँकि z का वास्तविक भाग ऋणात्मक तथा काल्पनिक भाग धनात्मक है। अतः बिंदु द्वितीय चतुर्थांश में स्थित होगा।

$\therefore$ $$\arg(z)=\pi-\theta=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

> **नोट** *जब हम z का कोणांक ज्ञात करते हैं, तब हमें यह अच्छी तरह से निश्चित कर लेना चाहिए कि बिंदु कौन-से चतुर्थांश में स्थित है।*

निर्देश **(प्र. सं. 3 - 8) सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक को ध्रुवीय रूप में रूपांतरित कीजिए।**

(प्र. सं. 3–8) किसी सम्मिश्र संख्या को ध्रुवीय रूप में परिवर्तन करने के लिए, हम सम्मिश्र संख्या z को $r\cos\theta+ir\sin\theta$ के बराबर रख देते हैं, तत्पश्चात् दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करते हैं और r तथा θ के मानों के लिए सरल करते हैं।

प्रश्न 3. $1-i$

हल माना $z=1-i$

तब $1-i=r\cos\theta+ir\sin\theta$ रखने पर,

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$1=r\cos\theta \quad \text{...(i)}$$

तथा $$-1=r\sin\theta \quad \text{...(ii)}$$

अब, समी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$(1)^2+(-1)^2=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=1+1 \quad (\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$$

$$\Rightarrow r^2=2 \Rightarrow r=\sqrt{2}$$

अब, समी (ii) को समी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=\left|\frac{-1}{1}\right| \Rightarrow \tan\theta=|-1|=1$$

$\Rightarrow \quad \tan\theta = \tan\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

चूँकि z का वास्तविक भाग घनात्मक तथा काल्पनिक भाग ऋणात्मक है, अतः बिंदु चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है।

$\therefore \quad \arg(z) = -\theta = \left(-\frac{\pi}{4}\right)$

अंततः $\quad z = 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

जोकि $(1 - i)$ का आवश्यक ध्रुवीय रूप है।

प्रश्न 4. $-1 + i$

हल माना $z = -1 + i$

तब, $-1 + i = r\cos\theta + ir\sin\theta$ रखने पर,

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$-1 = r\cos\theta \quad \ldots(\text{i})$$

तथा
$$1 = r\sin\theta \quad \ldots(\text{ii})$$

अब, समी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$(-1)^2 + (1)^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$$

$\Rightarrow \quad r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 1 + 1$

$\Rightarrow \quad r^2 = 2 \quad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$\Rightarrow \quad r = \sqrt{2}$

अब, समी (ii) को समी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \left|\frac{-1}{-1}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

चूँकि z का वास्तविक भाग ऋणात्मक तथा काल्पनिक भाग धनात्मक है, अतः बिंदु द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है।

$\therefore \quad \arg(z) = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

अंततः $\quad z = -1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

जोकि $(-1 + i)$ का आवश्यक ध्रुवीय रूप है।

प्रश्न 5. $-1 - i$

हल माना $z = -1 - i$

तथा $-1 - i = r\cos\theta + ir\sin\theta$ रखने पर,

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$-1 = r\cos\theta \quad \ldots(\text{i})$$

तथा
$$-1 = r\sin\theta \quad \ldots(\text{ii})$$

अब, समी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta = (-1)^2 + (-1)^2$$

$$\Rightarrow \quad r^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 1 + 1$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = 2 \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{2}$$

अब, समी (ii) को समी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \left|\frac{-1}{-1}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = 1$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \tan\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

चूँकि z का वास्तविक तथा काल्पनिक भाग दोनों ऋणात्मक हैं, अतः बिंदु तृतीय चतुर्थांश में स्थित है।

$$\therefore \quad \arg(z) = -\pi + \theta = -\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{-3\pi}{4}$$

अंततः $\quad z = -1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

जोकि $(-1 - i)$ का आवश्यक ध्रुवीय रूप है।

प्रश्न 6. -3

हल माना $z = -3 + 0i$

तथा $-3 + 0i = r\cos\theta + ir\sin\theta$ रखने पर,

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$r\cos\theta = -3 \qquad \ldots\text{(i)}$$

तथा $$r\sin\theta = 0 \qquad \ldots\text{(ii)}$$

अब, समी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = (-3)^2 + (0)^2$$

$$\Rightarrow \quad r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 9$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = 9 \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$\Rightarrow \quad r = 3$$

अब, समी (ii) को समी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \left|\frac{0}{-3}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = 0 = \tan 0° \quad \Rightarrow \quad \theta = 0°$$

चूँकि z का वास्तविक भाग ऋणात्मक तथा काल्पनिक भाग धनात्मक है, अतः बिंदु द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है।

$$\therefore \quad \arg(z) = \pi - \theta = \pi - 0 = \pi$$

अंततः $\quad z = -3 + 0i = 3[\cos\pi + i\sin\pi]$

जोकि (-3) का आवश्यक ध्रुवीय रूप है।

प्रश्न 7. $\sqrt{3} + i$

हल माना $z = \sqrt{3} + i$

तथा $\sqrt{3} + i = r\cos\theta + ir\sin\theta$ रखने पर,

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर, हम पाते हैं कि

$$r\cos\theta = \sqrt{3} \quad \ldots(i)$$

तथा $$r\sin\theta = 1 \quad \ldots(ii)$$

अब, समी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = (\sqrt{3})^2 + (1)^2$$

$$\Rightarrow \quad r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 3 + 1 = 4$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = 4 \quad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$\Rightarrow \quad r = 2$$

अब, समी (ii) को समी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

चूँकि z का वास्तविक तथा काल्पनिक भाग दोनों धनात्मक है, अतः बिंदु प्रथम चतुर्थांश में स्थित है।

$$\therefore \quad \arg(z) = \theta = \frac{\pi}{6}$$

अंततः $$z = \sqrt{3} + i = 2\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

जोकि $(\sqrt{3} + i)$ का आवश्यक ध्रुवीय रूप है।

प्रश्न 8. i

हल माना $z = i = 0 + i$ तथा $0 + i = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$ रखने पर,

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$r\cos\theta = 0 \quad \ldots(i)$$

तथा $$r\sin\theta = 1 \quad \ldots(ii)$$

अब, समी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = (0)^2 + (1)^2$$

$$\Rightarrow \quad r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 1$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = 1 \quad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$\Rightarrow \quad r = 1$$

अब, समी (ii) को समी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \left|\frac{1}{0}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \infty = \tan\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

चूँकि z का वास्तविक तथा काल्पनिक भाग दोनों धनात्मक हैं, अतः बिंदु प्रथम चतुर्थांश में स्थित है।

$\therefore$ $$\arg(z) = \theta = \frac{\pi}{2}$$

अंततः $$z = 0 + i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

जोकि i का आवश्यक ध्रुवीय रूप है।

> **नोट** (प्र. सं. 3 - 8) *उपरोक्त प्रश्नों में विद्यार्थी कोणांक का मान अंतराल* $-\pi < \theta \le \pi$ *(लंबाई* 2π*) में लेना न भूलें अर्थात् प्रथम, द्वितीय, तृतीय तथा चतुर्थ चतुर्थांश के लिए क्रमशः* $\theta, \pi - \theta, -\pi + \theta$ *तथा* $-\theta$ *मुख्य मान होंगे।*

प्रश्नावली 5.3

निर्देश (प्र. सं. 1 - 10) **निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक को हल कीजिए।**

(प्र. सं. 1 - 10) यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ वास्तविक गुणांकों a, b, c के साथ तथा $a \neq 0$ है। तब,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ यदि } b^2 - 4ac > 0$$

तथा $$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\cdot i}{2a}$$ यदि $b^2 - 4ac < 0$ का प्रयोग करेंगे।

प्रश्न 1. $x^2 + 3 = 0$

हल दिया है, $x^2 + 3 = 0$

$\therefore$ $$x^2 = -3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$$

प्रश्न 2. $2x^2 + x + 1 = 0$

हल दिया है, $2x^2 + x + 1 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2, b = 1, c = 1$$

अब, $$D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 - 8 = -7 < 0$$

$\Rightarrow$ $$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2 \times 2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4} \qquad (\because \sqrt{-1} = i)$$

प्रश्न 3. $x^2 + 3x + 9 = 0$

हल दिया है, $x^2 + 3x + 9 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = 3, c = 9$$

अब, $D = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 9 - 36 = -27 < 0$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2 \times 1}, \quad x = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{27}}{2} \qquad (\because \sqrt{-1} = i)$

$= \dfrac{-3 \pm i\sqrt{9 \times 3}}{2} = \dfrac{-3 \pm i\, 3\sqrt{3}}{2}$

प्रश्न 4. $-x^2 + x - 2 = 0$

हल दिया है, $-x^2 + x - 2 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = -1, b = 1, c = -2$

अब, $D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(-1)(-2) = 1 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2 \times (-1)} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{-2} \qquad (\because \sqrt{-1} = i)$

प्रश्न 5. $x^2 + 3x + 5 = 0$

हल दिया है, $x^2 + 3x + 5 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = 1, b = 3, c = 5$

अब, $D = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 9 - 20 = -11 < 0$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2 \times 1}$

$x = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{11}}{2} \qquad (\because \sqrt{-1} = i)$

प्रश्न 6. $x^2 - x + 2 = 0$

हल दिया है, $x^2 - x + 2 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = 1, b = -1, c = 2$

अब, $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{-7}}{2 \times 1} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{7}}{2} \qquad (\because \sqrt{-1} = i)$

प्रश्न 7. $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$

हल दिया है, $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = \sqrt{2}, b = 1, c = \sqrt{2}$

$\therefore \quad D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1 - 4 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2 \times \sqrt{2}} \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \qquad (\because \sqrt{-1} = i)$

प्रश्न 8. $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$

हल दिया है, $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = \sqrt{3}, b = -\sqrt{2}, c = 3\sqrt{3}$$

अब, $D = b^2 - 4ac = (-\sqrt{2})^2 - 4 \times (\sqrt{3}) \times 3\sqrt{3}$

$$= 2 - 4 \times 3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 2 - 12 \times 3 = 2 - 36 = -34 < 0$$

$\Rightarrow$ $x = \dfrac{-(-\sqrt{2}) \pm \sqrt{-34}}{2 \times \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{34}}{2\sqrt{3}}$ $(\because \sqrt{-1} = i)$

प्रश्न 9. $x^2 + x + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0$

हल दिया है, $x^2 + x + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = 1, c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

अब, $D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \dfrac{4}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$$= 1 - \frac{4\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sqrt{2} < 0$$

$\Rightarrow$ $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 2\sqrt{2}}}{2 \times 1}$

$= \dfrac{-1 \pm i\sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$ $(\because \sqrt{-1} = i)$

प्रश्न 10. $x^2 + \dfrac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$

हल दिया है, $x^2 + \dfrac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$

उपरोक्त समीकरण में दोनों पक्षों में $\sqrt{2}$ से गुणा करने पर,

$$\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$$

समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = \sqrt{2}, b = 1, c = \sqrt{2}$$

अब, $D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1 - 4 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$

$\Rightarrow$ $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2 \times \sqrt{2}}$

$= \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$ $(\because \sqrt{-1} = i)$

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. $\left[i^{18}+\left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम इसे हल करने के लिए, हम i की घात को 2 या 4 के गुणक रूप में बदलेंगे तथा $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$ का प्रयोग करके इसे हल करेंगे। तत्पश्चात् सूत्र $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ का प्रयोग करेंगे।

हल $\left[i^{18}+\left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3=\left[(i^2)^9+\frac{1}{i^{25}}\right]^3=\left[(i^2)^9+\frac{1}{i\cdot i^{24}}\right]^3$

$$=\left[(-1)^9+\frac{1}{i\,(i^4)^6}\right]^3 \qquad (\because i^2=-1)$$

$$=\left[-1+\frac{1}{i}\right]^3 \qquad (\because i^4=1)$$

$$=\left[-1+\frac{1}{i}\times\frac{i}{i}\right]^3=\left[-1+\frac{i}{i^2}\right]^3$$

$$=[-1-i]^3 \qquad (\because i^2=-1)$$

$$=(-1)^3\,[1+i]^3$$

$$=-[(1)^3+i^3+3\times1\times i\,(1+i)] \qquad [\because (a+b)^3=a^3+b^3+3ab\,(a+b)]$$

$$=-(1-i+3i+3i^2) \qquad (\because i^3=-i)$$

$$=-(1-i+3i-3) \qquad (\because i^2=-1)$$

$$=-(-2+2i)=2-2i$$

> **नोट** *विद्यार्थियों से आग्रह किया जाता है कि व्यंजक का शुरुआत में घन न करें अर्थात् शुरुआत में सूत्र $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab\,(a+b)$ का प्रयोग न करें, ऐसा करने से गणना जटिल हो जाती है।*

प्रश्न 2. किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 के लिए, सिद्ध कीजिए

$$\text{Re}\,(z_1z_2)=\text{Re}\,(z_1)\,\text{Re}\,(z_2)-\text{Im}\,(z_1)\,\text{Im}(z_2)$$

हल माना $z_1=a+ib$

$\Rightarrow$ $\text{Re}\,(z_1)=a$ तथा $\text{Im}\,(z_1)=b$ ...(i)

तथा $z_2=c+id$ ...(ii)

$\Rightarrow$ $\text{Re}\,(z_2)=c$ तथा $\text{Im}\,(z_2)=d$

अब, $z_1z_2=(a+ib)(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd$

$$=ac+i\,(ad+bc)-bd \qquad (\because i^2=-1)$$

$$\Rightarrow \quad z_1 z_2 = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$$

$$\Rightarrow \quad \text{Re}\,(z_1 z_2) = ac - bd$$

$$\Rightarrow \quad \text{Re}\,(z_1 z_2) = \text{Re}\,(z_1)\,\text{Re}\,(z_2) - \text{Im}\,(z_1)\,\text{Im}\,(z_2) \qquad \text{[समी (i) तथा (ii) से]}$$

यहाँ Re वास्तविक भाग तथा Im काल्पनिक भाग को निरूपित करता है।

प्रश्न 3. $\left(\dfrac{1}{1-4i} - \dfrac{2}{1+i}\right)\left(\dfrac{3-4i}{5+i}\right)$ **को मानक रूप में परिवर्तित कीजिए।**

सर्वप्रथम हम व्यंजक का लघुत्तम समापवर्तक लेंगे तत्पश्चात् व्यंजक के हर को शुद्ध वास्तविक संख्या के रूप में परिवर्तित करेंगे।

हल $\left(\dfrac{1}{1-4i} - \dfrac{2}{1+i}\right)\left(\dfrac{3-4i}{5+i}\right) = \dfrac{\{1 + i - 2\,(1 - 4i)\}}{(1-4i)(1+i)} \times \left(\dfrac{3-4i}{5+i}\right)$

$$= \frac{1 + i - 2 + 8i}{1 + i - 4i - 4i^2} \times \frac{3-4i}{5+i}$$

$$= \frac{(1-2) + i\,(1+8)}{1 + i\,(1-4) - 4(-1)} \times \frac{3-4i}{5+i} \qquad (\because i^2 = -1)$$

$$= \frac{-1+9i}{5-3i} \times \frac{3-4i}{5+i} = \frac{-3 + 4i + 27i - 36i^2}{25 + 5i - 15i - 3i^2}$$

$$= \frac{-3 + i\,(4+27) - 36\,(-1)}{25 + (5-15)\,i - 3\,(-1)} \qquad (\because i^2 = -1)$$

$$= \frac{-3 + 31i + 36}{25 - 10i + 3} = \frac{33 + 31i}{28 - 10i} \times \frac{28 + 10i}{28 + 10i}$$

$$= \frac{924 + 330i + 868i + 310i^2}{784 - 100i^2} \qquad [\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$$

$$= \frac{924 + (330 + 868)i - 310}{784 + 100} \qquad (\because i^2 = -1)$$

$$= \frac{614 + 1198i}{884} = \frac{307 + i599}{442}$$

प्रश्न 4. यदि $x - iy = \sqrt{\dfrac{a - ib}{c - id}}$, **तो सिद्ध कीजिए कि** $(x^2 + y^2) = \dfrac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$

आवश्यक व्यंजक को सिद्ध करने के लिए, सर्वप्रथम हम दिए गए व्यंजक के दोनों पक्षों का मापांक लेंगे, तत्पश्चात् निम्न गुण का प्रयोग करेंगे

$$|z|^n = |z^n| \quad \text{तथा} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

हल दिया है, $x - iy = \sqrt{\dfrac{a - ib}{c - id}}$

$$\Rightarrow \quad x + i\,(-y) = \left(\frac{a - ib}{c - id}\right)^{1/2}$$

दोनों पक्षों का मापांक लेने पर,

$$|x + i(-y)| = \left|\left(\frac{a - ib}{c - id}\right)^{\frac{1}{2}}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \left|\frac{a - ib}{c - id}\right|^{\frac{1}{2}} \qquad \left(\because |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ तथा } |z^n| = |z|^n\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \left|\frac{a - ib}{c - id}\right|^{\frac{1}{2}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$x^2 + y^2 = \left|\frac{a - ib}{c - id}\right|$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{|a - ib|}{|c - id|} \qquad \left(\because \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\right)$$

$$\Rightarrow \quad (x^2 + y^2) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} \qquad (\because |x - iy| = \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$$

नोट *कृप्या सावधानी रखें कि, दिए हुए व्यंजक में दोनों पक्षों का वर्ग करके वास्तविक तथा काल्पनिक भाग तुलना के द्वारा x व y के पृथक्-पृथक मानों को ज्ञात करने की विधि बहुत जटिल व समय लेने वाली है, इसलिए विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है कि इस विधि का प्रयोग करें।*

प्रश्न 5. निम्नलिखित को ध्रुवीय रूप में परिवर्तित कीजिए

(i) $\dfrac{1 + 7i}{(2 - i)^2}$ (ii) $\dfrac{1 + 3i}{1 - 2i}$

सर्वप्रथम दिए गए व्यंजक को $a + ib$ के रूप में बदलेंगे, तत्पश्चात् प्राप्त $a + ib$ को ध्रुवीय रूप में परिवर्तित करेंगे।

हल (i) माना $z = \dfrac{1 + 7i}{(2 - i)^2} = \dfrac{1 + 7i}{4 + i^2 - 4i}$ $\quad [\because (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab]$

$$= \frac{1 + 7i}{4 - 1 - 4i} \qquad (\because i^2 = -1)$$

$$= \frac{1 + 7i}{3 - 4i} \times \frac{3 + 4i}{3 + 4i} = \frac{3 + 4i + 21i + 28i^2}{(3)^2 - (4i)^2} \qquad [\because (a - b)(a + b) = a^2 - b^2]$$

$$= \frac{3 + i(4 + 21) - 28}{9 - 16i^2} = \frac{-25 + 25i}{9 + 16} \qquad (\because i^2 = -1)$$

$$z = \frac{-25 + 25i}{25} = -1 + i$$

अब, माना $-1 + i = r\cos\theta + ir\sin\theta$

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक व काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$r\cos\theta = -1 \qquad \ldots(i)$$

तथा
$$r\sin\theta = 1 \qquad \ldots(ii)$$

समी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = (-1)^2 + (1)^2$$

$$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 1 + 1$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = 2 \qquad (\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1)$$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{2}$$

समी (ii) को समी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \left|\frac{1}{-1}\right| \Rightarrow \tan\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

चूँकि z का वास्तविक भाग ऋणात्मक तथा काल्पनिक भाग धनात्मक है। अतः बिंदु द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है।

$$\therefore \quad \arg(z) = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore \quad z = -1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right]$$

जोकि $\frac{1+7i}{(2-i)^2}$ का आवश्यक ध्रुवीय रूप है।

(ii) माना $z = \frac{1+3i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{1 + 2i + 3i + 3i \times 2i}{1^2 - (2i)^2}$ $[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$$= \frac{1 + 5i + 6i^2}{1 - 4i^2} \qquad (\because i^2 = -1)$$

$$= \frac{1 + 5i - 6}{1 + 4} = \frac{-5 + 5i}{5} \cancel{= -1 + i}$$

अब, आगे प्रथम भाग की भाँति करें।

निर्देश (प्र. सं. 6 - 9) दिए गए प्रत्येक समीकरण को हल कीजिए।

(प्र. सं. 6 - 9) यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ वास्तविक गुणांकों a, b, c के साथ तथा $a \neq 0$ है। तब,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{यदि } b^2 - 4ac > 0$$

तथा
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2} \cdot i}{2a}, \quad \text{यदि } b^2 - 4ac < 0 \text{ का प्रयोग करेंगे।}$$

प्रश्न 6. $3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$

हल दिया है, $3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 3, b = -4, c = \frac{20}{3}$$

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times \frac{20}{3} = 16 - 80 = -64 < 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-64}}{2 \times 3} = \frac{4 \pm 8i}{2 \times 3} = \frac{2(2 \pm 4i)}{2 \times 3} = \frac{2 \pm 4i}{3} = \frac{2}{3} \pm \frac{4}{3} i$$

प्रश्न 7. $x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$

हल दिया है, $x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = -2, c = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times \frac{3}{2} = 4 - 6 = -2 < 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-2}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm i\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} \pm \frac{i\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \frac{i\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$$

प्रश्न 8. $27x^2 - 10x + 1 = 0$

हल दिया है, $27x^2 - 10x + 1 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 27, b = -10, c = 1$$

$$\therefore \quad D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 27 \times 1 = 100 - 108 = -8 < 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{-8}}{2 \times 27} = \frac{10 \pm 2\sqrt{2}\, i}{2 \times 27} = \frac{2(5 \pm \sqrt{2}i)}{2 \times 27} = \frac{5}{27} \pm \frac{\sqrt{2}i}{27}$$

प्रश्न 9. $21x^2 - 28x + 10 = 0$

हल दिया है, $21x^2 - 28x + 10 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 21, b = -28, c = 10$$

$$\therefore \quad D = b^2 - 4ac = (-28)^2 - 4 \times 21 \times 10 = 784 - 840 = -56 < 0$$

$$x = \frac{-(-28) \pm \sqrt{-56}}{2 \times 21} = \frac{28 \pm \sqrt{14 \times 4}\, i}{2 \times 21}$$

$$= \frac{28}{2 \times 21} \pm \frac{2\sqrt{14}i}{2 \times 21} = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{14}}{21} i$$

प्रश्न 10. यदि $z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i$, तब $\left|\frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + 1}\right|$ का मान ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम दिए गए व्यंजक में, z_1 तथा z_2 के मान रखेंगे, तत्पश्चात् व्यंजक को $a + ib$ के रूप में परिवर्तित करेंगे तथा आवश्यक मापांक के गुणों का प्रयोग करके इसे हल करेंगे।

हल $\left|\frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + 1}\right| = \left|\frac{2 - i + 1 + i + 1}{2 - i - (1 + i) + 1}\right|$ $(\because z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i)$

$$= \left|\frac{4}{2 - i - 1 - i + 1}\right|$$

$$= \left|\frac{4}{2 - 2i}\right| = \left|\frac{2}{1 - i}\right| = \frac{2}{|1 - i|} \qquad \left[\because \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} \qquad (\because |z| = \sqrt{a^2 + b^2})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

प्रश्न 11. यदि $a + ib = \frac{(x + i)^2}{2x^2 + 1}$, तो सिद्ध कीजिए कि $a^2 + b^2 = \frac{(x^2 + 1)^2}{(2x^2 + 1)^2}$

हल दिया है, $a + ib = \frac{(x + i)^2}{2x^2 + 1}$

दोनों ओर मापांक लेने पर,

$$|a + ib| = \left|\frac{(x + i)^2}{2x^2 + 1}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|(x + i)^2|}{|2x^2 + 1|} = \frac{|x + i|^2}{2x^2 + 1}$$

$$\left[\because \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, |z^n| = |z|^n \text{ तथा } \mathrm{Re}|(z)| = \mathrm{Re}(z)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2}{2x^2 + 1}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर,

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = \frac{(x^2 + 1)^2}{(2x^2 + 1)^2}$$

> **नोट** *विद्यार्थी कृप्या ध्यान रखें कि दिए हुए व्यंजक के दोनों पक्षों के वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना के द्वारा x व y के पृथक्-पृथक मान ज्ञात करने की विधि बहुत जटिल व लंबी होगी तथा इसमें बहुत समय व्यर्थ होगा। अत: विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है कि इस विधि का प्रयोग कम-से-कम करें।*

प्रश्न 12. माना $z_1 = 2 - i,\ z_2 = -2 + i$, निम्न का मान निकालिए।

(i) $\text{Re}\left(\dfrac{z_1 z_2}{\bar{z}_1}\right)$ (ii) $\text{Im}\left(\dfrac{1}{z_1 \bar{z}_1}\right)$

(i) सर्वप्रथम दिए गए व्यंजक में z_1 व z_2 तथा z_1 के संयुग्मी का मान रखकर इसे $a + ib$ के रूप में सरल करेंगे, तत्पश्चात् प्राप्त $a + ib$ का वास्तविक भाग ज्ञात करेंगे।

(ii) सर्वप्रथम हम मापांक के गुण $z\bar{z} = |z|^2$ का प्रयोग करके व्यंजक को $a + ib$ के रूप में परिवर्तित करेंगे, तत्पश्चात् $a + ib$ का काल्पनिक भाग ज्ञात करेंगे।

हल

(i) $\dfrac{z_1 z_2}{\bar{z}_1} = \dfrac{(2-i)(-2+i)}{\overline{(2-i)}} = \dfrac{-(2-i)(2-i)}{(2+i)}$ $(\because z_1 = 2 - i,\ z_2 = -2 + i)$

$(\because z = a + ib \Rightarrow \bar{z} = a - ib)$

$= \dfrac{-(2-i)^2}{2+i} = \dfrac{-(4+i^2-4i)}{2+i} = \dfrac{-(4-1-4i)}{2+i}$ $(\because i^2 = -1)$

$= \dfrac{-(3-4i)}{2+i} \times \dfrac{2-i}{2-i}$

$= \dfrac{-(6-3i-8i+4i^2)}{(2)^2-(i)^2}$ $[\because (a+b)(a-b) = (a^2 - b^2)]$

$= \dfrac{-(6-11i-4)}{4-i^2}$ $(\because i^2 = -1)$

$= \dfrac{-(2-11i)}{4+1}$ $(\because i^2 = -1)$

$= -\left(\dfrac{2}{5} - \dfrac{11i}{5}\right) = -\dfrac{2}{5} + \dfrac{11}{5}i$

$\therefore\ \text{Re}\left(\dfrac{z_1 z_2}{\bar{z}_1}\right) = -\dfrac{2}{5}$

(ii) $\text{Im}\left(\dfrac{1}{z_1 \bar{z}_1}\right)$

$\because$ $z\bar{z} = |z|^2 \Rightarrow z_1\bar{z}_1 = |z_1|^2$

$\Rightarrow$ $z_1\bar{z}_1 = |-2+i|^2 = (\sqrt{4+1})^2 = 5 + 0i$

$\therefore$ $\dfrac{1}{z_1\bar{z}_1} = \dfrac{1}{5} + 0i$

$\Rightarrow$ $\text{Im}\left(\dfrac{1}{z_1\bar{z}_2}\right) = 0$

प्रश्न 13. सम्मिश्र संख्या $\dfrac{1+2i}{1-3i}$ का मापांक और कोणांक ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम दिए व्यंजक को $a + ib$ के रूप में परिवर्तित करेंगे, तत्पश्चात् प्राप्त $a + ib$ का मापांक व कोणांक ज्ञात करेंगे।

हल माना $z = \dfrac{1+2i}{1-3i}$

$\therefore \quad z = \dfrac{1+2i}{1-3i} \times \dfrac{1+3i}{1+3i} = \dfrac{1+3i+2i+6i^2}{1^2-(3i)^2} \qquad [\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$= \dfrac{1+5i+6(-1)}{1-9i^2} \qquad (\because i^2 = -1)$

$= \dfrac{1+5i-6}{1+9} = \dfrac{-5+5i}{10} = \dfrac{-1+i}{2} \Rightarrow z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$\therefore \quad |z| = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} \qquad (\because |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2})$

$= \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{2}{4}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

अब, $\tan\theta = \left|\dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}\right| \qquad \left[\because \theta = \tan^{-1}\left|\left(\dfrac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right)\right|\right]$

$\Rightarrow \quad \tan\theta = 1 = \tan\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$

चूँकि z का वास्तविक भाग ऋणात्मक तथा काल्पनिक भाग धनात्मक है, अतः बिंदु द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है।

$\therefore \quad \arg(z) = \pi - \theta = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

अंततः मापांक $= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ तथा कोणांक $(z) = \dfrac{3\pi}{4}$

प्रश्न 14. **यदि $(x - iy)(3 + 5i)$, $(-6 - 24i)$ की संयुग्मी है, तो वास्तविक संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए।**

व्यंजक $(x - iy)(3+5i)$ तथा $(-6-24i)$ के संयुग्मी में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करके, हम x तथा y के मान ज्ञात करेंगे।

हल $(x-iy)(3+5i) = 3x + 5xi - 3yi - 5yi^2$

$= 3x + (5x-3y)i + 5y \qquad (\because i^2 = -1)$

$= (3x+5y) + (5x-3y)i \qquad \ldots(i)$

दिया है, $\quad (x-iy)(3+5i) = \overline{(-6-24i)}$

$\Rightarrow \quad (3x+5y) + i(5x-3y) = -6 + 24i$

[समी (i) तथा $z = (a+ib) \Rightarrow \bar{z} = (a-ib)$ का प्रयोग करने पर]

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक व काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$3x + 5y = -6$

तथा $\quad 5x - 3y = 24$

अब, प्रतिस्थापन या विलोपन विधि के द्वारा उपरोक्त समीकरणों को हल करने पर,

$x = 3$ तथा $y = -3$

प्रश्न 15. $\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}$ का मापांक ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम दिए गए व्यंजक को इसके मानक रूप $a+ib$ में परिवर्तित करेंगे, तत्पश्चात् हम इसका मापांक ज्ञात करेंगे।

हल माना $z=\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1+i)^2-(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{(1+i^2+2i)-(1+i^2-2i)}{1-i^2}$

$$=\frac{4i}{2}=2i=0+2i \qquad \left[\begin{array}{l}\because (a+b)^2=a^2+b^2+2ab\\ \text{तथा } (a-b)^2=a^2+b^2-2ab\end{array}\right]$$

$\therefore \qquad |z|=\sqrt{0^2+2^2}=2$

प्रश्न 16. यदि $(x+iy)^3=u+iv$, तो दर्शाइए कि $\frac{u}{x}+\frac{v}{y}=4(x^2-y^2)$

सर्वप्रथम हम दिए गए व्यंजक के बाएँ पक्ष में सूत्र $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ का प्रयोग करेंगे, तत्पश्चात् दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करेंगे।

हल $(x+iy)^3=u+iv \Rightarrow x^3+(iy)^3+3xiy(x+iy)=u+iv$

$\Rightarrow \qquad x^3+i^3y^3+3ix^2y+3xy^2i^2=u+iv$

$\Rightarrow \qquad x^3-iy^3+3ix^2y-3xy^2=u+iv \qquad (\because i^3=-i, i^2=-1)$

$\Rightarrow \qquad (x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)=u+iv$

अब, वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$x^3-3xy^2=u \quad \text{तथा} \quad 3x^2y-y^3=v$$

$\therefore \qquad \frac{u}{x}+\frac{v}{y}=\frac{x^3-3xy^2}{x}+\frac{3x^2y-y^3}{y}$

$$=x^2-3y^2+3x^2-y^2=4x^2-4y^2=4(x^2-y^2)$$ इति सिद्धम्

प्रश्न 17. यदि α और β भिन्न सम्मिश्र संख्याएँ हैं, जहाँ $|\beta|=1$, तब $\left|\frac{\beta-\alpha}{1-\overline{\alpha}\beta}\right|$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\left|\frac{\beta-\alpha}{1-\overline{\alpha}\beta}\right|=\left|\frac{(\beta-\alpha)\overline{\beta}}{(1-\alpha\beta)\overline{\beta}}\right|=\left|\frac{(\beta-\alpha)\overline{\beta}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}}\right|$ (अंश तथा हर में $\overline{\beta}$ से गुणा करने पर)

$=\left|\frac{(\beta-\alpha)\overline{\beta}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}\right| \qquad (\because \beta\overline{\beta}=|\beta|^2=|1|^2=1)$

$=\frac{|(\beta-\alpha)\overline{\beta}|}{|\overline{\beta}-\overline{\alpha}|} \qquad \left(\because \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\right)$

$=\frac{|\beta-\alpha||\overline{\beta}|}{|\beta-\alpha|} \qquad (\because |z_1z_2|=|z_1||z_2| \text{ तथा } |\overline{z_1}-\overline{z_2}|=|\overline{z_1-z_2}|)$

$=\frac{|\beta-\alpha||\beta|}{|\beta-\alpha|} \qquad (\because |\overline{z}|=|z|)$

$=|\beta|=1$

नोट *विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है कि यहाँ पर व्यंजक में α तथा β के मान सम्मिश्र संख्या के रूप में मानकर न रखें क्योंकि यह विधि बहुत लंबी व जटिल तथा अधिक समय लगने वाली होगी।*

प्रश्न 18. **समीकरण $|1-i|^x = 2^x$ के शून्येत्तर पूर्णांक मूलों की संख्या ज्ञात कीजिए।**

सर्वप्रथम हम दिए गए व्यंजक के बाएँ पक्ष का मापांक लेंगे, तत्पश्चात् दोनों पक्षों में घातों की तुलना करेंगे।

हल दिया है, $|1-i|^x = 2^x$

$\Rightarrow$ $(\sqrt{(1)^2+(-1)^2})^x = 2^x$ $\quad (\because |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2})$

$\Rightarrow$ $(\sqrt{1+1})^x = 2^x$

$\Rightarrow$ $(\sqrt{2})^x = 2^x \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^x$

दोनों पक्षों में 2 की घात की तुलना करने पर,

$\Rightarrow$ $\frac{x}{2} = x \Rightarrow x = 2x \Rightarrow 2x - x = 0$

$x = 0$

परंतु हमें अशून्य हल की आवश्यकता है। अतः हलों की संख्या शून्य है।

नोट *यहाँ, $x = 0$ एक हल को निरूपित करता है। विद्यार्थियों को यहाँ शब्द 'हल' तथा 'हलों की संख्या' के मध्य अंतर समझना अनिवार्य है।*

प्रश्न 19. **यदि $(a+ib)(c+id)(e+if)(g+ih) = A+iB$, तब सिद्ध कीजिए**

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2) = A^2+B^2$$

दिए गए व्यंजक में सर्वप्रथम हम दोनों पक्षों का मापांक लेंगे, तत्पश्चात् मापांक के गुण का प्रयोग करेंगे।

हल $(a+ib)(c+id)(e+if)(g+ih) = A+iB$

दोनों पक्षों का मापांक लेने पर,

$$|(a+ib)(c+id)(e+if)(g+ih)| = |A+iB|$$

$\Rightarrow$ $|a+ib||c+id||e+if||g+ih| = |A+iB|$

$(\because |z_1z_2 \dots z_n| = |z_1||z_2||z_3|\dots|z_n|)$

$\Rightarrow$ $\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sqrt{e^2+f^2}\sqrt{g^2+h^2} = \sqrt{A^2+B^2}$

$(\because$ यदि $z = a+ib$, तब $|z| = \sqrt{a^2+b^2})$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2) = A^2+B^2$$

प्रश्न 20. यदि $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$, तब m का न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक मान ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम व्यजक के बाएँ पक्ष को इसके मानक रूप अर्थात् $a+ib$ में बदलेंगे, तत्पश्चात् दोनों पक्षों में यदि आधार समान है, तब उनकी घातों की तुलना करेंगे।

हल $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1 \Rightarrow \left[\frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}\right]^m = 1$

$\Rightarrow \left[\frac{(1+i)^2}{1-i^2}\right]^m = 1 \Rightarrow \left[\frac{1+i^2+2i}{1+1}\right]^m = 1$

[$\because (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ तथा $i^2 = -1$]

$\Rightarrow \left[\frac{1-1+2i}{2}\right]^m = 1$

$\Rightarrow i^m = 1$

$\Rightarrow (\sqrt{-1})^m = 1$ ($\because i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$)

$\Rightarrow (-1)^{\frac{m}{2}} = (-1)^2$

दोनों पक्षों में घातों की तुलना करने पर, $\frac{m}{2} = 2 \Rightarrow m = 4$

अतः m का न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक मान 4 है।

> **नोट** 1 *को हम* $(-1)^2, (-1)^4, (-1)^6, \ldots$ *आदि के रूप में लिख सकते हैं परंतु न्यूनतम मान हेतु हम* $(-1)^2$ *लेंगे।*